Министерство образования и молодежной политики
Республики Коми
"Сыктывкарский политехнический техникум"

Методическое пособие
по математике

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Основные теоретические положения

Сыктывкар, 2016

Составитель: преподаватель Орлова Светлана Владимировна

Одобрено на заседании ЦК ____________ протокол №_______

от ______________________

Пояснительная записка

Данное методическое пособие предназначено для студентов "Сыктывкарского политехнического техникума"и содержит материал включающий основные понятия аналитической геометрии на плоскости и в пространстве.

Содержание

Раздел 1. Элементы аналитической геометрии на плоскости

1. Системы координат

В школьном курсе математики уже было дано определение метода координат. Положение точки М на плоскости, относительно введенной системы координат, определяется заданием двух чисел: абсциссой x и ординатой y. Пара чисел (x,y) называется **декартовыми прямоугольными координатами** точки на плоскости.

Декартова прямоугольная система координат не является единственной системой координат, позволяющей определять положение точек плоскости, но является наиболее простой и часто используемой координатной системой.

Полярная система координат.

Пусть на плоскости даны некоторая точка О (назовем ее **полюсом**) и проходящая через нее ось ОР (назовем ее **полярной** осью) (рис. 17). Положение любой точки М плоскости определяется расстоянием этой точки от полюса - **радиус-вектором** r и полярным углом φ между полярной осью и радиус-вектором r.

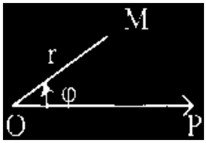

Рис. 17.

Две координаты (r, φ) определяют единственную точку плоскости и называются ее полярными координатами (условимся придавать радиус-вектору значения $r \geq 0$ а $0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

Замечание. Полюс О является точкой, радиус-вектор которой равен нулю, а полярный угол φ не определен.

Таким образом, системы координат позволяют установить **взаимно-однозначное** соответствие между точками плоскости и парами чисел. Можно установить связь между декартовыми и полярными координатами одной и той же точки. Пусть даны декартова система координат и полярная с полюсом в начале координат и полярной осью, совпадающей с осью абсцисс (рис.18).

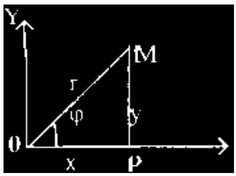

Рис. 18.

Обозначим через x и y декартовы координаты точки М, через r и φ ее полярные координаты. Из треугольника ОМР видно, что зависимость между полярными координатами (r,φ) точки М и ее прямоугольными координатами (x,y) выражается формулами:

$$x = r \times \cos\varphi\ ; \qquad (1)$$

$$y = r \times \sin\varphi$$

и обратно

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x}. \qquad (2)$$

Пример. Даны декартовы координаты точки M(1,-1). Найти ее полярные координаты.

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$tg\varphi = \frac{-1}{1} - 1$$

Т.к. x=1>0 и y = -1<0, то точка M находится в IV четверти, а значит $\varphi = \frac{7}{4}\pi$.

Итак, полярные координаты точки; r = $\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{7}{4}\pi$

2. Линии и их уравнения

В предыдущем параграфе было показано, что в декартовой системе координат каждой точке плоскости соответствует пара действительных чисел и, наоборот, каждый паре чисел соответствует определенная точка плоскости.

Можно установить, что линиям на плоскости соответствуют уравнения с двумя переменными. Связь между уравнениями и линиями позволит свести изучение геометрических свойств линий к исследованию аналитических свойств соответствующих им уравнений.

В аналитической геометрии всякую линию рассматривают как геометрическое место точек, удовлетворяющих определенному свойству.

Линии на плоскости соответствует некоторое уравнение с двумя переменными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней. Такое уравнение называется уравнением данной линии. Входящие в это уравнение координаты x и y произвольной точки линии называются **текущими координатами**.

3. Прямая линия

3.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Изучение геометрических свойств линий начнем с простейшей из линий - с прямой. Всякая прямая в декартовой системе координат может быть представлена уравнением первой степени и, обратно, всякое уравнение первой степени относительно x и y определяет прямую линию.

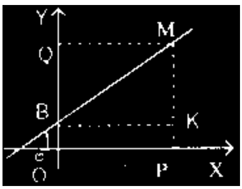

Рис. 19.

Рассмотрим прямую, не параллельную осям координат. Положение ее на плоскости вполне определяется заданием **угла наклона прямой к оси OX** и величиной отрезка OB, отсекаемого прямой на оси OY. Под углом наклона прямой к оси OX будем понимать тот угол, на который надо повернуть ось OX против часовой стрелки, чтобы она совпала с данной прямой (или оказались параллельной ей), обозначим этот угол через φ. Величину отрезка OB обозначим через b. Пусть M(x,y) - произвольная точка, лежащая на прямой (рис.19).

При движении точки по прямой ее координаты остаются все время связанными между собой некоторым условием. Выпишем это условие. Проведем прямые BK и MK, параллельные осям координат. Мы получили прямоугольный треугольник MBK, для которого верно соотношение

$$tg\varphi = \frac{MK}{BK} \qquad (5)$$

Тангенс угла наклона прямой к оси OX называется угловым коэффициентом прямой. Обозначим его буквой K, т.е. $tg\varphi=K$. Из рис.19 видно, что MK=y-b, BK=x, равенство (5) теперь можно записать в виде:

$$K = \frac{y-b}{x}$$

и окончательно

$$y=Kx+b. \qquad (6)$$

Этому уравнению удовлетворяет лишь координаты точек, лежащих на рассматриваемой прямой, оно нарушается, если точка не лежит на прямой. Таким образом, полученное уравнение (6) является уравнением заданной прямой линии.

Уравнение прямой вида (6) называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом**.

Уравнение (6) мы получили, считая, что прямая не параллельна осям координат.

Посмотрим, какое уравнение будет иметь прямая, параллельная какой-либо координатной оси.

1) Пусть прямая параллельна оси OY. Обозначим через a абсциссу точки пересечения этой прямой с осью OX. Очевидно, любая точка прямой имеет абсциссу, равную a, если же точка не лежит на прямой, то ее абсцисса будет отлична от a. Следовательно, уравнение этой прямой имеет вид

$$x=a. \qquad (7)$$

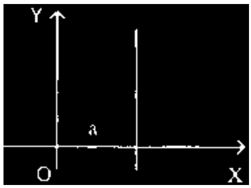

Рис. 20.

2) Пусть теперь прямая параллельна оси OX. Ее угловой коэффициент K=0. Считая этот случай частным, из уравнения (6) получаем

$$y=b \qquad (8)$$

Итак, если прямая не параллельна осям координат, то ее уравнение может быть записано в форме (б). Если же прямая параллельна оси OY, то ее уравнение можно записать в форме (7), уравнение прямой, параллельной оси OX, имеет вид (8). Все эти уравнения являются уравнениями первой степени относительно переменных x и y. Таким образом, мы показали, что в декартовой системе координат всякая прямая может быть представлена уравнениями первой степени.

Пример. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси OY отрезок b=3 и составляющую с осью: 1) $\varphi=45^\circ$; 2) $\varphi=135^\circ$.

Решение. 1) $K=tg\varphi=tg\ 45^\circ=1$. Уравнение прямой имеет вид: y=1xx+3 или $y=x^2+3$;

2) $K = tg\varphi = tg135^\circ =-1$. Уравнение имеет вид: y=-x+3.

3.2. Общее уравнение прямой

Общее уравнение первой степени относительно x и y имеет вид:

Ax+By+C=O. (9)

Здесь A, B, C - произвольные числа, не равные нулю одновременно. Разрешим уравнение (9) относительно y (считая, что B $\neq$ 0).

Получим: $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$, или, введя обозначения $-\frac{A}{B}=K$, $-\frac{C}{B}=b$, y=Kx-b.

Выше мы показали, что это уравнение является уравнением прямой линии с угловым коэффициентом K и отсекающей на оси OY отрезок, равный b.

Если теперь B=O, то уравнение (9) примет вид

Ax+C=O.

Разрешая это уравнение относительно x, получим $x=-\frac{C}{A}$, или, обозначая $-\frac{C}{A}=a$, $x=a$

Получили уравнение прямой, параллельной оси OY.

При A=0 уравнение (9) примет вид: By+C=0, или $y=-\frac{C}{B}$.

Обозначая $-\frac{C}{B}=b$, получим

y=b.

Получили уравнение прямой, параллельной оси OX.

Таким образом, мы показали, что всякое уравнение первой степени относительно x и y определяет прямую линию. Уравнение (9) называется **общим уравнением прямой**.

Пример. Написать уравнение с угловым коэффициентом для прямой, заданной общим уравнением 2x+3y+7=0.

Разрешим уравнение относительно y:

$$y=-\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}.$$

Видно, что угловой коэффициент $K=-\frac{2}{3}$, а величина отрезка, отсекаемого прямой на оси OY, $b=-\frac{7}{3}$.

Таким образом мы убедились, что общее уравнение первой степени (9) определяет прямую линию. Рассмотрим некоторые его частные случаи.

1. При C=0 уравнение (9) имеет вид:

Ax+By=0,

которое определяет прямую, проходящую через начало координат, т.к. ему удовлетворяют координаты начала x=0, y=0.

2. Если в уравнении (9) A=0, получим By+C=0. или

y=b (где $b = -\dfrac{C}{B}$).

Получили уравнение прямой, параллельной оси OX, т.к. для всех точек прямой линии ордината y имеет постоянное значение.

3. При B=0 уравнение (9) примет вид:

Ax+C=0

или x=a (где $a = -\dfrac{C}{A}$)

и определяет прямую, параллельную оси OY.

4. При C=0, B=0 уравнение (9) имеет вид:

Ax=0

или x=0.

Прямая совпадает с осью OY.

5. При C=0, A=0 уравнение (9) примет вид:

By=0

или y=0.

Прямая совпадает с осью OX.

3.3. Угол между двумя прямыми

Пусть даны две прямые

$y=K_1x+b_1$ (I)

$y=K_2x+b_2$ (II)

Углом между прямыми (I) и (II) будем называть тот угол, на который надо повернуть прямую (I) (против часовой стрелки), чтобы она совпадала с прямой (II), (или стала ей параллельна).

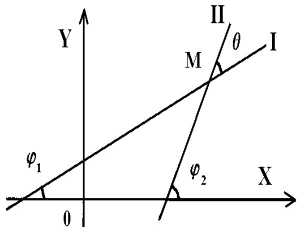

Рис. 21.

Очевидно, что угол между прямыми (I) и (II) определяется не однозначно (с точностью до слагаемого, кратного π). Значение угла всегда можно выбрать так, чтобы оно было неотрицательно и меньше π.

Обозначим теперь углы наклона прямых (I) и (II) к оси OX соответственно через φ_1 и φ_2, а угол между прямыми через π. Тогда $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ (см. рис. 21) или $\pi = \varphi_2 - \varphi_1$.

По известной формуле имеем:

$$tg\theta = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \times tg\varphi_2}.$$

Т.к. $tg\varphi_1 = K_1$ и $tg\varphi_2 = K_2$, получим:

$$tg\theta = \frac{K_2 - K_1}{1 + K_1 \times K_2}. \qquad (10)$$

Получили формулу для вычисления угла между двумя прямыми.

Замечание. Если порядок, в котором рассматриваются прямые, не указан, тогда можно установить его произвольно. Очевидно, изменение порядка повлечет за собой изменение знака для тангенса угла.

Пример. Найти угол между прямыми

y=2x+5 и 3x+y+2=0.

Пронумеруем прямые в порядке их записи, тогда их угловые коэффициенты будут равны $K_1 = 2$, $K_2 = -3$ соответственно. По формуле (10) получим:

$$tg\theta = \frac{-3-2}{1-2\times 3} = 1$$, отсюда q = 45°.

3.4. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть прямые $y=K_1x+b_1$ и $y=K_2x+b_2$ параллельны, тогда угол $\pi = 0$, а значит и $tg\pi = 0$. Из формулы (10) следует, что $tg\,\varphi_1 = tg\,\varphi_2$

или $K_1 = K_2$. (11)

Итак, **для параллельности двух прямых необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были равны.**

Пусть прямые (I) и (II) перпендикулярны, тогда можно считать, что:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2};$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$tg\varphi_2 = tg(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}) = -ctg\varphi_1 = -\frac{1}{tg\varphi_1}$$ или $tg\varphi_1 \times tg\varphi_2 = -1$.

Получаем условие перпендикулярности двух прямых

$$K_1 \times K_2 = -1 \qquad (12)$$

Пример 1. Прямые 3x-4y+5=0 и 6x-8y-3=0 параллельны, т.к. их угловые коэффициенты $K_1 = \frac{3}{4}$ и $K_2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ равны. Условие параллельности выполнено.

Пример 2. Определить, при каком значении K прямая y=Kx+3 будет перпендикулярна прямой y=4x-1. Угловой коэффициент второй прямой равен K_2=4. Из условия перпендикулярности получим $K \cdot 4 = -1$. Отсюда $K = -\frac{1}{4}$.

3.5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом

Найдем уравнение прямой с данным угловым коэффициентом K, проходящей через данную точку $M(x_1,y_1)$.

Уравнение этой прямой будем искать по формуле (6)

y=Kx+b.

Неизвестное значение b определим из условия прохождения искомой прямой через точку M, координаты которой должны удовлетворять уравнению (6). Подставляя в это уравнение вместо текущих координат значения x_1,y_1 получим:

$y_1=Kx_1+b$.

Отсюда можно определить b и подставить найденное значение в уравнение (6)

$b=y_1-Kx_1$;

$y=Kx+(y_1-Kx_1)$ (13)

или $y-y_1$=K(x-x1).

Мы получили уравнение прямой линии, проходящей через точку $M(x_1,y_1)$ и имеющей данный угловой коэффициент K.

Пример 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (1,2) параллельно прямой 2x-3y+5=0.

В силу параллельности прямых угловой коэффициент искомой прямой равен угловому коэффициенту $K = \frac{2}{3}$ данной прямой. Итак, подставляя в уравнение (13) $K = \frac{2}{3}$, x_1=1, y_1=2, получим уравнение искомой прямой $y - 2 = \frac{2}{3}(x-1)$.

После преобразования имеем:

2x-3y+4=0.

Пример 2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (-1,1) перпендикулярно к прямой 3x-y+2=0.

Угловой коэффициент данной прямой K_1=3. Из условия перпендикулярности прямых $K_1 K2 = -1$ получаем угловой коэффициент K_2 искомой прямой:

$3K_2 = -1$ или $K_2 = -\frac{1}{3}$.

Итак, из (13) получим уравнение искомой прямой

$$K_2 = -\frac{1}{3}$$

или $x+3y-2=0$.

3.6. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Даны две точки $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$.

Найдем уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Так как эта прямая проходит через точку M, то согласно формуле (13) ее уравнение имеет вид:

$y-y_1 = K(x-x_1)$,

где K - неизвестный угловой коэффициент.

Значение этого коэффициента определим из того условия, что искомая прямая проходит через точку N, а значит ее координаты удовлетворяют уравнению (13):

$y_2 - y_1 = K(x_2 - x_1)$,

отсюда

$$K = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Подставим найденное значение K в уравнение (13) и получим

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

или $$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (14)$$

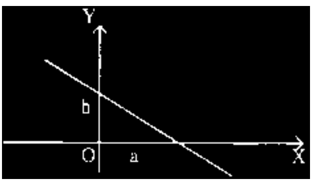

Рис. 22.

Формула (14) определяет уравнение прямой, проходящей через две точки $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$.

В частном случае, когда точки M(a,0), N(0,b) лежат на осях координат, то уравнение (14) примет более простой вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (15)$$

Уравнение (15) называется уравнением прямой в отрезках, здесь a и b обозначают отрезки, отсекаемые прямой на осях (рис. 22).

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки M(1,2) и B(3,-1).

Решение. Согласно (14) уравнение искомой прямой имеет вид:

$$\frac{y-2}{-1-2}=\frac{x-1}{3-1}\text{, откуда }\frac{y-2}{-3}=\frac{x-1}{2}$$

или $2(y-2)=-3(x-1)$

окончательно получаем искомое уравнение

$$3x+2y-7=0.$$

Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M{2,1) и точку пересечения прямых x+y-1=0, x-y+2=0.

Решение. Координаты точки пересечения прямых найдем, решив совместно данные уравнения

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}$$

Если сложить почленно эти уравнении, получим 2x+1=0, откуда $x=-\frac{1}{2}$.

Подставим найденное значение в любое уравнение, найдем значение ординаты y:

$$-\frac{1}{2}-y+2=0 \text{ или } y=\frac{3}{2}.$$

Теперь напишем уравнение прямой, проходящей через точки (2,1) и $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$:

$$\frac{y-1}{\frac{3}{2}-1}=\frac{x-2}{-\frac{1}{2}-2} \text{ или } \frac{y-1}{\frac{1}{2}}=\frac{x-2}{-\frac{5}{2}}.$$

Отсюда $\frac{y-1}{1}=\frac{x-2}{-5}$ или $-5(y-1)=x-2$.

Окончательно получаем уравнение искомой прямой x+5y-7=0.

Пример 3. Найти уравнение прямой, проходящей через точки M(2,1) и N(2,3). Используя формулу (14), получим уравнение

$$\frac{y-1}{3-1}=\frac{x-2}{2-2}.$$

Оно не имеет смысла, так как второй знаменатель равен нулю. Из условия задачи видно, что абсциссы обеих точек имеют одно и то же значение. Значит, искомая прямая параллельна оси OY и ее уравнение имеет вид: x=2.

Замечание. Если при записи уравнения прямой по формуле (14) один из знаменателей окажется равным нулю, то искомое уравнение можно получить, приравняв к нулю соответствующий числитель.

3.7. Расстояние от точки до прямой

Задачу вычисления расстояния от данной точки до данной прямой можно легко решить, используя уже полученные знания.

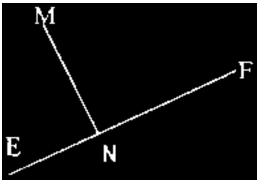

Рис. 23.

Пусть дана точка M(-1,1) и прямая 3x-4y+12=0. Необходимо найти расстояние от этой точки до прямой EF. Расстояние d от точки M до прямой EF равно длине перпендикуляра MN, опущенного из M на EF (Рис.23).

Запишем алгоритм решения задачи.

1) Найдем угловой коэффициент K_1 прямой EF, для этого разрешим уравнение прямой EF относительно y:

$$y=\frac{3}{4}x+3 \qquad (16)$$

$$K_1=\frac{3}{4}.$$

2) Используя условие перпендикулярности двух прямых, найдем угловой коэффициент K_2 перпендикуляра MN:

$$K_1\cdot K_2=-1$$

или $\frac{3}{4}\cdot K_2=-1$,

отсюда $K_2=-\frac{4}{3}$.

3) Теперь напишем уравнение прямой MN, проходящей через точку M(-1,1) с угловым коэффициентом $K_2=-\frac{4}{3}$

$$y-1=-\frac{4}{3}(x+1) \text{ или}$$

$$y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}. \qquad (17)$$

4) Вычислим координаты точки N - точки пересечения прямой EF с перпендикуляром MN. Координаты этой точки удовлетворяют уравнениям (16) и (17), мы их получим, решив совместно эти уравнения. Приравняем правые части этих уравнений

$$\frac{3}{4}x+3=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$$

и вычислим отсюда абсциссу x точки N

$$\frac{3}{4}x+\frac{4}{3}x=-\frac{1}{3}-3 \text{ или } \frac{25}{12}x=-\frac{10}{3}\text{, откуда } x=-\frac{8}{5}.$$

Подставив найденное значение, например, в уравнение (16), вычислим ординату точки N:

$$y=\frac{3}{4}(-\frac{8}{5})+3 \text{ или } y=-\frac{6}{5}+3\text{, откуда } y=\frac{9}{5}.$$

Итак, точка N имеет координаты $N(-\frac{8}{5};\frac{9}{5})$

5) Найдем теперь расстояние между точками M и N

$$|MN|=d=\sqrt{\left(-1+\frac{8}{5}\right)^2+\left(1-\frac{9}{5}\right)^2}=1.$$

Эту задачу можно легко решить, используя общую формулу вычисления расстояния d от точки $M(x_0,y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$, которая имеет вид:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (18)$$

Для нашей задачи мы получим:

$$d=\frac{|3\cdot(-1)-4\cdot 1+12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{\sqrt{25}}=1.$$

4. Кривые второго порядка

4.1. Предварительные замечания

Общее уравнение второго порядка относительно x и y содержит члены второй степени (x^2,xy,y^2), первой степени (x,y) и нулевой степени (свободный член), а значит имеет вид:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \quad (19)$$

Здесь хотя бы один коэффициент A, B, C должен быть отличен от нуля.

Уравнение (19) является **уравнением второй степени**, а линии, уравнения которых описываются уравнением типа (19), называются **кривыми второго порядка**

4.2. Окружность

Самой простой кривой второго порядка является окружность, которую можно **определить как геометрическое место точек, удаленных от точки C(a,b) на равное расстояние R**.

Точка C называется центром окружности, а R - радиусом данной окружности. Уравнение окружности с центром в точке C(a,b) и с радиусом R всегда можно привести к простому виду:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (20)$$

Пример. Привести к виду (20) (если это вормožно) уравнение второго порядка

$$x^2+y^2-2x+4y-4=0.$$

Сгруппируем члены, содержащие x, и отдельно члены, содержащие y, и выделим в них полные квадраты, т.е. двучлен x^2-2x представим в виде:

$$x^2-2x=(x-1)^2-1,$$

а двучлен y^2+4y - в виде

$$y^2+4y=(y+2)^2-4.$$

После этого преобразования данное уравнение запишется так:

$$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4-4=0$$

или $(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$.

Мы получили уравнение окружности с центром в точке C(1,-2) и радиусом, равным 3.

Замечание 1. Уравнение (19) определяет окружность (его можно привести к виду (20)), если коэффициенты при квадратах координат равны между собой, а член с произведением координат отсутствует.

Замечание 2. Если начало координат совпадает с центром окружности, то ее уравнение имеет вид:

$$x^2+y^2=R^2.$$

Такое уравнение называется **каноническим уравнением окружности**.

В частном случае, если R=0, мы имеем уравнение $x^2+y^2=0$, определяющее одну точку - начало координат.

4.3. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная

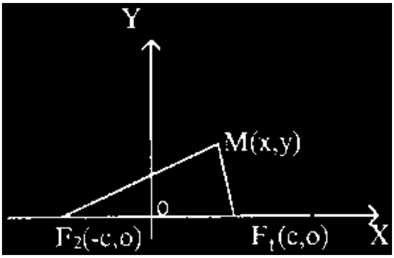

Рис. 24.

(больше расстояния между фокусами).

Обозначим фокусы эллипса через F_1 и F_2 (рис. 24), а расстояние между ними через 2с

$F_1F_2=2c$.

Примем за ось абсцисс прямую, соединяющую фокусы, выбрав на ней положительное направление от F_2 к F_1; начало координат возьмем в середине отрезка F_1F_2 между фокусами. Тогда координаты точек F_1 и F_2 будут соответственно (с,0) и (-с,0).

Обозначим сумму расстояний точек эллипса от фокусов через 2а. По определению эллипса имеем

$MF_1+MF_2=2a$.

Каноническое уравнение эллипса в выбранной системе координат с данными обозначениями имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (21)$$

здесь $b^2=a^2-c^2 (c<a)$.

Исследуя уравнение эллипса (21), можно сделать следующие заключения относительно формы эллипса.

1) Симметрия эллипса.

Так как уравнение (21) содержит только квадраты текущих координат, то если точка (x,y) находится на эллипсе, то и точки (±x,±y) находится на эллипсе при произвольном выборе знаков у координат. Это означает, что оси координат являются осями симметрии эллипса.

Ось симметрии эллипса, на которой находятся фокусы, называется **фокальной осью**. Центр симметрии (точка пересечения осей симметрии) называется **центром** эллипса. Для эллипса, заданного уравнением (21), фокальная ось совпадает с осью ОХ, а центр - с началом координат.

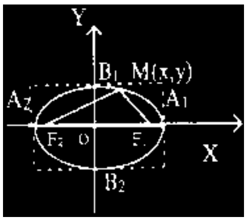

Рис. 25.

2) Точки пересечения с осями симметрии.

Точки пересечения эллипса с осями симметрии называются его вершинами. Вершины A_1, A_2, B_1, B_2 эллипса, заданного уравнением (21), находятся в точках пересечения эллипса с осями координат. Координаты вершин А можно найти, полагая в уравнении (21) y=0

$\frac{x^2}{a^2}=1$, откуда $x^2=a^2$ и $x=\pm a$.

Полагая x=0, найдем ординаты вершин B_1 и B_2;

$\frac{y^2}{b^2}=1$, или $y^2=b^2$, откуда $y=\pm b$.

Итак, вершины эллипса имеют следующие координаты:

$A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ (рис. 25).

Отрезки $A_1A_2=2a$ и $B_1B_2=2b$, соединяющие противоположные вершины эллипса, называются соответственно **большой и малой осями** эллипса. Длины a и b называют соответственно **большой и малой полуосями эллипса**.

3) Форма эллипса.

Из уравнения (21) следует, что $\frac{x^2}{a^2}\le 1$, или. $|x|\le a$.

Аналогично $|y|\le b$. Следовательно, эллипс расположен внутри прямоугольника со сторонами, равными 2a и 2b, с центром в начале координат (см. рис.25).

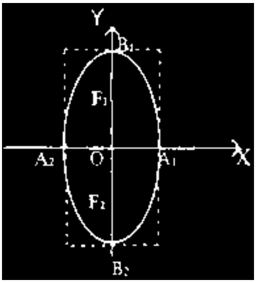

Рис. 26.

Замечание 1. Если a=b (c=0), уравнение (21) принимает вид $x^2+y^2=a^2$ и определяет окружность, а значит окружность можно рассматривать как частный случай эллипса с равными полуосями.

Замечание 2. Число $\varepsilon=\frac{c}{a}$ - называется **эксцентриситетом** эллипса.

Для эллипса $0\le\varepsilon<1$ (для окружности e=0). Величина эксцентриситета влияет на форму эллипса. Так, при очень малом e полуоси a и b почти равны и эллипс напоминает окружность. Если же величина e близка к единице, то эллипс имеет сильно вытянутую форму.

Замечание 3. Если фокусы эллипса расположены на оси OY, то эллипс «вытягивается» вдоль оси OY, как это показано на рис.26, тогда фокусы имеют следующие координаты $F_1(0,c)$ и $F_2(0,-c)$.

Как известно, траекторией движения планет и некоторых комет является эллипс, в одном из фокусов которого находится солнце. Оказывается, эксцентриситеты планетных орбит малы, а кометных - велики (близки к 1).

Таким образом, планеты движутся почти по окружностям, а кометы - по вытянутым эллипсам, то приближаясь к солнцу, то удаляясь от него.

Пример. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось b=3.

Решение. По условию 2c=8, т.е. c=4, b=3.

Мы знаем, что $b^2=a^2-c^2$, отсюда $a^2=b^2+c^2$, т.е. $a^2=3^2+4^2=25$ или a=5.

Уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

4.4. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

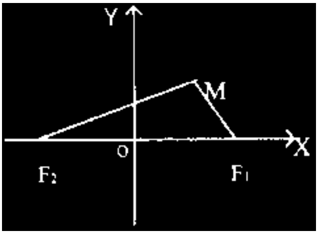

Рис. 27.

Обозначим эту постоянную через 2a, расстояние между фокусами через 2c, а оси координат выберем так же, как в 4.3.

Пусть M(x,y) - произвольная точка гиперболы (рис. 27).

По определению гиперболы $F_2M-F_1M=\pm 2a$. (Знак плюс в правой части надо выбрать, если $F_2M>F_1M$, и минус, если $F_2M<F_1M$.

Каноническое уравнение гиперболы в выбранной системе координат при данных обозначениях имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (22)$$

где $b^2 = c^2-a^2$ $(c>a)$.

Исследуем формулу гиперболы.

1) Уравнение (22) содержит квадраты текущих координат, следовательно, оси координат являются осями симметрии гиперболы. Ось симметрии, на которой находятся фокусы, называется фокальной осью, точка пересечения осей симметрии - центром гиперболы. Для гиперболы, заданной уравнением (22), фокальная ось совпадает с осью OX, а центр - с началом координат.

2) Точки пересечения с осями симметрии. Точки пересечения гиперболы с осями симметрии называются вершинами гиперболы. Полагая в уравнении (22) y=0, найдем абсциссы точек пересечения с осью OX:

$\frac{x^2}{a^2}=1$ или $x^2 = a^2$, откуда $x=\pm a$.

Итак, точки $A_1(a,0)$ и $A_2(-a,0)$ являются вершинами гиперболы.

Если же в уравнении (22) принять x=0; получим

$-\frac{y^2}{b^2}=1$ или $y^2=-b^2$,

т.е. для y мы получили мнимые значения: Это означает, что гипербола не пересекает ось OY. В соответствии с этим ось симметрии, пересекающая гиперболу; называется действительной осью (фокальная ось); ось симметрии, которая не пересекает гиперболу, - ее мнимой осью. Для гиперболы, заданной уравнением

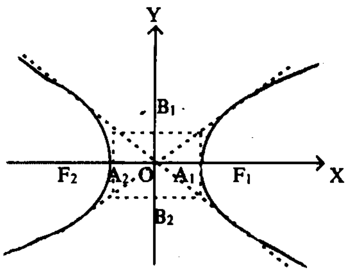

Рис. 28.

(22), действительной осью симметрии является ось OX, а мнимой осью – ось OY. Длина отрезка A_1A_2=2a, число a называется действительной полуосью гиперболы. Отложим на мнимой оси гиперболы по обе стороны от центра симметрии O отрезки OB_1 и OB_2 длиною b, тогда отрезок B_1B_2=2b называют мнимой осью, а величина b - мнимой полуосью гиперболы.

3) Форма гиперболы.

Из уравнения (22) видно, что $\dfrac{x^2}{a^2} \geq 1$, следовательно, $|x| \geq 1$. Кривая имеет форму; изображенную на рис.28. Она располагается вне прямоугольника со сторонами, равными 2a и 2b, с центром в начале координат, и состоит из двух отдельных ветвей, простирающихся в бесконечность (см. рис.28). Диагонали этого прямоугольника определяются уравнениями

$$y = \frac{b}{a}x\,;\ y = -\frac{b}{a}x \qquad (23)$$

и являются асимптотами гиперболы.

Если a=b, гипербола называется равносторонней.

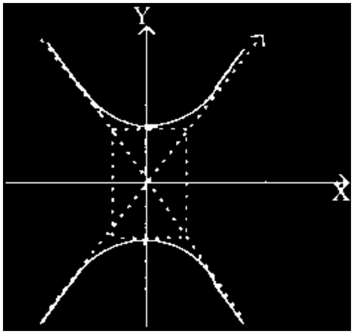

Рис. 29.

Замечание 1. Если мнимая ось гиперболы равна 2a и расположена на оси OX, а действительная ось равна 2b и расположена на оси OY, то уравнение такой гиперболы (рис. 29) имеет вид:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (24)$$

Гиперболы (22) и (24) называются **сопряженными гиперболами**.

Замечание 2. **Эксцентриситетом** гиперболы называется отношение фокусного расстояния к действительной оси:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \qquad (25)$$

Для любой гиперболы ε>1, это число определяет форму гиперболы.

Пример. Найти координаты фокусов и вершин гиперболы
$16x^2 - 9y^2 = 144$.

Написать уравнение ее асимптот и вычислить эксцентриситет.

Решение. Напишем каноническое уравнение гиперболы, для этого обе части уравнения поделим на 144. После сокращения получим

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

Отсюда видно, что $a^2=9$, т.е. $a=3$ и $b^2=16$, т.е. $b=4$.
Для гиперболы $c^2=a^2+в^2=16+9=25$, отсюда $c=5$.
Теперь можем написать координаты вершин и фокусов гиперболы:
$A_1(3,0)$, $A_2(-3,0)$, $F_1(5,0)$, $F_2(-5,0)$.

Эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$, а уравнения асимптот имеют вид:

$y=\frac{4}{3}x$ и $y=-\frac{4}{3}x$.

4.5. Парабола

Парабола есть геометрическое место точек, равноотстоящих от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Выберем систему координат таким образом: за ось OX примем прямую, проходящую через фокус F перпендикулярно к директрисе, за положительное направление примем направление от директрисы к фокусу. За начало координат примем середину O отрезка от точки F до директрисы, длину которого обозначим через P и будем называть параметром параболы. Пусть M(x,y) произвольная точка, лежащая на параболе. Пусть точка N основание перпендикуляра, опущенного из M на директрису. По определению параболы MN=MF.

Из этого условия получаем каноническое уравнение параболы в выбранной системе координат

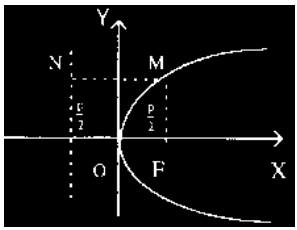

Рис. 30.

$y^2=2px$. (26)

Пусть $p>0$, исследуем форму параболы.

Из канонического уравнения параболы видно, что x не может принимать отрицательных значений, т.е. все точки параболы лежат справа от оси OY. Уравнение содержит переменную y в квадрате, значит парабола симметрична относительно оси OX, эта ось называется **осью** параболы. Точка O пересечения параболы с ее осью симметрии называется **вершиной** параболы. Для параболы, заданной уравнением (26), вершина совпадает с началом координат, а ось симметрии - с осью OX. График параболы имеет вид, изображенный на рис. 30.

Уравнение директрисы записывается в виде $x=-\frac{p}{2}$.

Замечание 1. При $p<0$ парабола располагается левее оси OY.
Замечание 2. Парабола
$x^2=2py$ (27)

имеет фокус $F(0,\frac{p}{2})$, директрису $y=-\frac{p}{2}$ и расположена над осью OX, если p>0, и под осью OX при p<0. Осью симметрии такой параболы является ось OY, а вершиной - начало координат.

Пример. Составить уравнение параболы и ее директрисы, зная, что она симметрична относительно оси OY, фокус находится в точке F(0;2), вершина совпадает с началом координат.

Решение. Будем искать уравнение параболы в виде $x^2=2py$.

По условию $\frac{p}{2}=2$, а значит p=4. Итак, искомое уравнение имеет вид: $x^2=8y$, уравнение ее директрисы: y=-2.

Раздел 2. Плоскость и прямая в пространстве

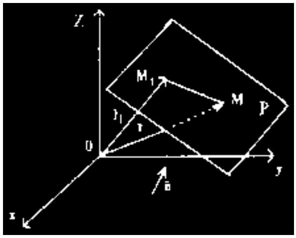

Рис. 31.

1. Плоскость

1.1. Уравнение плоскости

Пусть в декартовой системе координат в пространстве R^3 дана точка M_1, заданная радиус-вектором $\bar{r}_1\{x_1, y_1, z_1\}$. Зададим произвольный вектор $\bar{n}\{A,B,C\}\neq 0$. Запишем теперь уравнение плоскости P, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\bar{n}$.

Пусть M(x,y,z) - любая точка плоскости с радиус-вектором $\bar{r}\{x,y,z\}$, тогда вектор $\overrightarrow{M_1M}=\bar{r}-\bar{r}_1$ (рис. 31) будет перпендикулярен вектору $\bar{n}$ и их скалярное произведение равно нулю

$$\bar{n}(\bar{r}-\bar{r}_1)=0 \qquad (1)$$

Это равенство будет справедливо для всех точек M, лежащих на плоскости P, и нарушается для точек, не принадлежащих плоскости. Итак, мы получили векторное уравнение плоскости P.

В координатной форме это уравнение имеет вид:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \qquad (2)$$

Вектор $\bar{n}(A,B,C)$ называется **нормальным вектором** к плоскости (2). Итак, уравнение (2) определяет уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\bar{n}$.

Если в уравнении (2) раскрыть скобки, мы получим уравнение первой степени относительно x, y, z

$Ax+By+Cz+D=0$, (3)

где $D=-(Ax_1+By_1+Cz_1)$.

Итак, любая плоскость в пространстве определяется уравнением первой степени и является поверхностью первого порядка. Верно и обратное утверждение: любое уравнение первой степени относительно переменных x, y, z определяет плоскость в пространстве.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(-1,2,3) перпендикулярно вектору $\overline{OM}$.

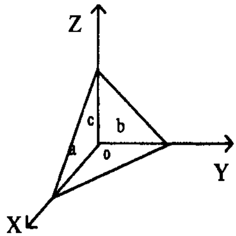

Рис. 32.

Решение. Вектор нормали $\overline{n} = \overline{OM} = \{-1,2,3\}$.

По формуле (2) имеем:

$-1(x+1)+2(y-2)+3(z-3)=0$ или

$-x+2y+3z-14=0$.

Умножая обе части равенства на -1, окончательно получим

$x-2y-3z+14=0$.

Замечание. Полезно запомнить уравнение плоскости, отсекающей на осях координат отрезки длины a, b, c соответственно (рис. 32). Это уравнение называется уравнением плоскости в отрезках и имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (4)$$

1.2. Угол между двумя плоскостями

Пусть даны уравнения двух плоскостей:

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$;

$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,

где $\overline{n}_1\{A_1,B_1,C_1\}$ и $\overline{n}_2\{A_2,B_2,C_2\}$ - вектора нормали к этим плоскостям.

Углом между двумя плоскостями будем называть любой из двух смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Очевидно, один из этих двугранных углов равен углу φ между векторами $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$.

Поэтому, согласно формуле (12) гл.II, угол между двумя плоскостями вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (5)$$

1.3. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Если плоскости перпендикулярны, то скалярное произведение векторов $\overline{n}_1$

и $\bar{n}_2$ равно нулю, т.е. $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$.

Переписав это условие в координатной форме, получаем условие перпендикулярности двух плоскостей:

$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0;$ (6)

Если же плоскости параллельны, то и векторы n_1 n_2 параллельны. Условие параллельности векторов дает нам условие параллельности плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

(7)

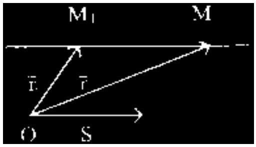

Рис. 33.

2. Прямая линия

2.1. Уравнение прямой в пространстве

Пусть в заданной системе координат дана точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$ с радиус-вектором $\bar{r}_1\{x_1, y_1, z_1\}$ и вектор $\bar{S}\{m, n, l\}$.

Через точку M_1 параллельно вектору $\bar{S}$ можно провести единственную прямую в пространстве (рис. 33). Найдем ее уравнение.

На искомой прямой возьмем произвольную точку $M(x,y,z)$ с радиус-вектором $\overline{OM} = \bar{r}$, причем

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \overline{M_1M} . \quad (8)$$

Вектор $\overline{M_1M}$ коллинеарен вектору $\bar{S}$, а значит $\overline{M_1M} = \lambda \bar{S}$, где λ - произвольный параметр ($\lambda \neq 0$).

Равенство (8) перепишем в виде:

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda \bar{S} \quad (9)$$

Уравнение (9) называется **векторным уравнением прямой линии**. Вектор $\bar{S}$ называется **направляющим** вектором прямой.

Векторное уравнение (9) можно записать в равносильной координатной форме:

$x=x_1 + lm;$
$y=y_1 + ln;$
$z=z_1 + ll.$ (10)

Уравнения (10) называют **параметрическими уравнениями прямой линии**.

Из каждого равенства уравнений (10) можно выразить параметр

$$\lambda = \frac{x - x_1}{m}; \ \lambda = \frac{y - y_1}{n}; \ \lambda = \frac{z - z_1}{l} .$$

Приравнивая правые части, получим:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{l} \qquad (11)$$

Уравнения (11) называют **каноническими уравнениями прямой линии**.
Уравнения (11) можно записать в виде системы двух уравнений, например,

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n} \\ \dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{l} \end{cases} \qquad (12)$$

Каждое уравнение этой системы является уравнением первой степени, а значит, определяет плоскость в пространстве.

Вообще, всякая линия в пространстве может быть задана как пересечение двух поверхностей.

Таким образом, любая прямая вполне определяется пересечением плоскостей, проходящих через эту прямую. Эти плоскости можно задать их общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (13)$$

Уравнения (13) называются общими уравнениями прямой.

2.2. Взаимное расположение двух прямых

Пусть заданы две прямые своими каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{l_1};\bar{S}_1=\{m_1,n_1,l_1\};$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{l_2};\bar{S}_2=\{m_2,n_2,l_2\}.$$

Очевидно, что за угол между этими прямыми можно принять угол между их направляющими векторами $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$.

По формуле (5) имеем:

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+l_1l_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+l_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+l_2^2}} \qquad (14)$$

Если две прямые параллельны, то коллинеарны их направляющие векторы.

Отсюда получаем условие **параллельности двух прямых**:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{l_1}{l_2} \tag{15}$$

Условие перпендикулярности двух прямых следует из условия перпендикулярности их направляющих векторов:

$$m_1m_2+n_1n_2+l_1l_2=0 \tag{16}$$

2.3. Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть дано уравнение прямой линии

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{l_1}$$

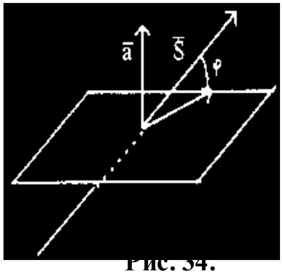

Рис. 34.

и уравнение плоскости Ax+By+Cz+D=0.

$\bar{S}\{m,n,l\}$ - направляющий вектор прямой,

$\bar{a}\{A,B,C\}$ - нормальный вектор плоскости.

Очевидно (как видно из рис. 34), угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{S}$ равен $\frac{\pi}{2}-\varphi$, где φ - угол между прямой и плоскостью, а значит

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cl|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+l^2}} \tag{17}$$

Здесь числитель взят по абсолютной величине, так как $\sin\varphi\geq 0$.

Равенство (17) определяет угол между прямой и плоскостью.

В случае параллельности прямой и плоскости векторы $\bar{a}$ и $\bar{S}$ ортогональны, следовательно, их скалярное произведение равно нулю. Отсюда получим условие параллельности прямой и плоскости:

Am+Bn+Cl=0. (18)

Условие перпендикулярности прямой и плоскости совпадает с условием параллельности векторов $\bar{a}$ и $\bar{S}$, т.е,

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{l} \tag{19}$$

Литература

1. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. - М.: Наука,1972.
2. Ефимов Н.Е. Краткий курс аналитической геометрии. - М.:Физматлит, 2005.
3. Кострикин А.И., Манин Ю.А. Линейная алгебра и геометрия. - М.: Физматлит, 2004.
4. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. - СПб.: Лань, 2003.
5. Цубербиллер О.И. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. -СПб.:Лань, 2005
6. Шипачев В.С. Высшая математика. -М.:Высш.шк., 1990.